Brüche gleichnamig machen

L_4

Das *Erweitern von Brüchen* (siehe L_3) ist lediglich ein Instrument, das vorwiegend eingesetzt wird, um Brüche mit unterschiedlichem Divisor 'gleichnamig' zu machen. Brüche *gleichnamig machen* heisst nichts anderes, als Brüche so zu *erweitern*, dass sie alle den **gleichen Divisor** haben.

Dazu muss jedoch ein geeigneter Divisor gefunden werden, den alle beteiligten Brüche, die *gleichnamig gemacht* werden sollen, durch einfaches *Erweitern* erhalten können. Diesen geeigneten Divisor nennt man ***gemeinsamer* Divisor** oder gemeinsamer Teiler. Der eleganteste *gemeinsame Divisor* ist das ***kgV*** (siehe Kapitel Mengenlehre). Dieses ist jedoch nicht immer ganz einfach zu finden und daher gilt:

*Den einfachsten **gemeinsamen Divisor** findet man, indem man alle Divisoren der beteiligten Brüche, die gleichnamig gemacht werden sollen, miteinander **multipliziert**.*

Hat man einmal einen *gemeinsamen Divisor* gefunden, müssen alle beteiligten Brüche, die *gleichnamig gemacht* werden sollen, so *erweitert* werden, dass die neu entstehenden Brüche jeweils den *gemeinsamen Divisor* haben.

Beispiel: Brüche die gleichnamig gemacht werden sollen:

$\frac{7}{2} \qquad \frac{1}{-3} \qquad \frac{2}{5}$

gemeinsamer Divisor: $2 \cdot -3 \cdot 5 = -30$

Erweiterung der Brüche so, dass die dabei neu entstehenden Brüche alle als Divisor den *gemeinsamen Divisor* -30 haben:

$$\frac{7}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{-15}{-15} = \frac{-105}{-30} \qquad \frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{-30} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{-6}{-6} = \frac{-12}{-30}$$

Weiteres Beispiel mit Variabeln:

Brüche: $\frac{1}{a} \qquad \frac{-1}{2a} \qquad \frac{5}{3}$ *gemeinsamer Divisor*: $a \cdot 2a \cdot 3 = 6a^2$

Erweiterung der Brüche:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{6a}{6a} = \frac{6a}{6a^2} \qquad \frac{-1}{2a} = \frac{-1}{2a} \cdot \frac{3a}{3a} = \frac{-3a}{6a^2} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2a^2}{2a^2} = \frac{10a^2}{6a^2}$$

A_4 Übungen

1. Finde für die folgenden Brüche jeweils den *gemeinsamen Divisor*:

a) $\frac{1}{2};\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3};\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{-2};\frac{-4}{3}$

d) $\frac{1}{7};\frac{2}{8};\frac{3}{-5}$ e) $\frac{2}{5};\frac{-1}{6};\frac{2}{12}$

f) $\frac{5}{a};\frac{-1}{2};\frac{2}{5};\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{a};\frac{2}{b};\frac{a}{3};\frac{-1}{2}$

h) $\frac{1}{2a};\frac{1}{a};\frac{-1}{3};\frac{2}{3a};\frac{a}{b};\frac{b}{2}$

*2. Finde für die folgenden Brüche jeweils das kgV:

a) $\frac{1}{3};\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5};\frac{1}{10}$ c) $\frac{5}{12};\frac{-2}{15}$

d) $\frac{4}{3};\frac{-3}{4};\frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{-2};\frac{-1}{3};\frac{a}{4}$

f) $\frac{-a}{3};\frac{2a}{5};\frac{1}{12};\frac{3}{8a}$

3. Mache die folgenden Brüche *gleichnamig* durch Erweiterung auf den *gemeinsamen Divisor*:

a) $\frac{1}{3}=$ $\frac{1}{2}=$ b) $\frac{1}{2}=$ $\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{-3}=$ $\frac{2}{3}=$ d) $\frac{4}{-5}=$ $\frac{1}{-2}=$

e) $\frac{-1}{a}=$ $\frac{5}{3}=$ f) $\frac{2}{3}=$ $\frac{3}{4}=$ $\frac{-2}{5}=$

g) $\frac{2}{-5}=$ $\frac{2}{-3}=$ $\frac{-2}{x}=$

h) $\frac{a}{3}=$ $\frac{1}{10}=$ $\frac{-1}{a}=$ $\frac{2a}{15}=$

i) $\frac{a}{-b}=$ $\frac{b}{3}=$ $\frac{2a}{3}=$ $\frac{-3}{a}=$ $\frac{2}{b}=$

Addition und Subtraktion von Brüchen

L5

Brüche können addiert oder subtrahiert werden, sobald sie einen **gemeinsamen Divisor** haben (siehe L_4). Haben Brüche einen **gemeinsamen Divisor**, so darf man die *Dividenden* der Brüche, die addiert und/oder subtrahiert werden, einfach auf einen gemeinsamen Bruchstrich schreiben, der als einzigen Divisor den **gemeinsamen Divisor** der beteiligten Brüche hat.

Beispiel: $\frac{2}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{5} - \frac{4}{3} + \frac{7}{15} =$

Diese Brüche werden nun durch **Erweitern** gleichnamig gemacht:

$$\frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 15}{2 \cdot 15} + \frac{3 \cdot 15}{2 \cdot 15} + \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} =$$

$$\frac{12}{30} - \frac{15}{30} + \frac{45}{30} + \frac{6}{30} - \frac{40}{30} + \frac{14}{30} =$$

Nun, da sie gleichnamig sind, darf man die **Dividenden und die Operationszeichen** über <u>einen</u> Bruchstrich schreiben, der als <u>einzigen</u> Divisor den **gemeinsamen Divisor** hat:

$$\frac{12 - 15 + 45 + 6 - 40 + 14}{30} =$$

Dann werden die Dividenden natürlich **addiert/subtrahiert**:

$$\frac{22}{30} =$$

Und das Endresultat wird selbstverständlich **gekürzt**:

$$\frac{11}{15}$$

Mit diesem Verfahren können alle Additionen und Subtraktionen von Brüchen gemacht werden. Falls *Variabeln* in den einzelnen Dividenden und/oder im Divisor vorkommen, werden sie einfach in die Berechnungen miteinbezogen. Kommen *Einheiten* in den Brüchen vor, so müssen diese natürlich zuerst umgerechnet werden, so, dass nur noch eine Einheit vorhanden ist.

A_5 Übungen

1. Addiere und/oder subtrahiere die folgenden Brüche:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} =$

*d) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} =$

e) $\frac{2}{3} - \frac{-1}{4} =$

f) $\frac{1}{-4} + \frac{3}{2} =$

g) $\frac{1}{5} + \frac{5}{6} =$

h) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} =$

i) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} =$

j) $\frac{4}{5} - \frac{11}{-4} =$

k) $\frac{5 \cdot 10^{4}}{6 \cdot 10^{5}} - \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-8}} =$

*l) $\frac{a}{3} - \frac{4}{3b} =$

m) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

n) $\frac{-1}{5} - \frac{1}{-4} + \frac{-1}{6} =$

o) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} =$

p) $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{6} =$

q) $\frac{5}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{7}{4} =$

r) $\frac{4\text{ m}}{5} - \frac{2\text{ dm}}{5} - \frac{3\text{ cm}}{7} =$

*s) $\frac{3}{x} + \frac{2}{3} - \frac{-3}{5} =$

*t) $\frac{5}{a} - \frac{5}{b} - \frac{3}{c} =$

u) $\frac{3 \cdot 10^{6}}{a} - \frac{b}{3 \cdot 10^{3}} - \frac{2}{c} =$

v) $\frac{a}{x} + \frac{3}{4a} + \frac{4x}{6} =$

*w) $\frac{x^{2}}{2} + \frac{2}{a} - \frac{1}{4} =$

*x) $\frac{1}{5a^{3}} - \frac{a}{4} + \frac{b}{6a^{2}} =$

y) $\frac{1}{2\text{ g}} + \frac{1}{3\text{ kg}} + \frac{-1}{4\text{ g}} + \frac{1}{5\text{ kg}} + \frac{1}{6\text{ g}} + \frac{1}{7\text{ g}} =$

z) $\frac{-3}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{-4} + \frac{4}{5} - \frac{-1}{4} + \frac{3}{7} =$

α) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2x}{4} - \frac{4x}{5} - \frac{1}{5} + \frac{-3}{7} - \frac{x}{5} =$

*β) $\frac{3}{2a} + \frac{1}{b} - \frac{5}{ab} - \frac{-a}{2} - \frac{1}{-a} + \frac{2}{3a} - \frac{3}{ab} =$

*γ) $\frac{3}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2}{a+b} - \frac{1}{2a+2b} =$

Multiplikation und Division von Brüchen (Doppelbrüche) L6

Die Multiplikation von Brüchen ist sehr einfach, da man lediglich die **Dividenden miteinander multipliziert** und das Produkt über den Bruchstrich des Ergebnisbruches schreibt, die **Divisoren miteinander multipliziert** und das Produkt unter den Bruchstrich des Ergebnisbruches schreibt. Der Ergebnisbruch kann dann noch **gekürzt** werden.

Beispiel: $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{40}{105} = \frac{8}{21}$

Die Division von Brüchen ist schon komplizierter. Die Division von Brüchen, (oder) auch die **Doppelbrüche** genannt, sind Divisionen, in welchen im Dividend und/oder im Divisor ein oder mehrere Quotienten auftreten. Doppelbrüche können *vollständig* sein oder *unvollständig*. **Vollständige Doppelbrüche** haben im Dividend **gleich-viele Quotienten** wie im Divisor, unvollständige nicht. Durch die folgende Regel können **vollständige Doppelbrüche** in einfache Brüche verwandelt werden:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x}$$

In Worten: "Der obere Bruch mal den *Kehrwert* des unteren Bruches."

Bei unvollständigen Doppelbrüchen können einzelne Ausdrücke mit der Ergänzung des neutralen Divisors 'Eins' zu Brüchen gemacht werden.

Beispiel:

$$\frac{a}{\frac{x}{y}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{y}{x} = \frac{a \cdot y}{1 \cdot x} = \frac{ay}{x}$$

oder:

$$\frac{\frac{a}{b}}{x} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot x} = \frac{a}{bx}$$