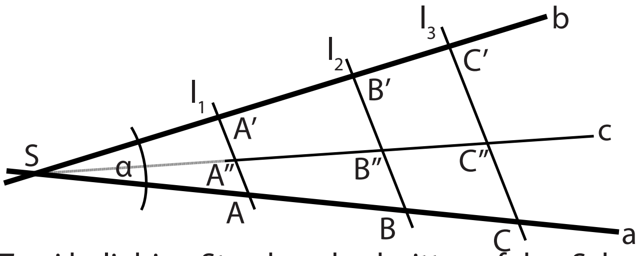
Anwendungsbeispiel '**Strahlensatz**' L5

Das 'berühmteste' Beispiel der Proportionalität ist der ***Strahlensatz*** aus der *Geometrie* (siehe dazu auch **Geometrie**). Hier noch einmal die Hauptsätze des Strahlensatzes:

Voraussetzung: Zwei oder mehrere Parallelen l_1, l_2, l_3, usw... schneiden zwei oder mehrere Schenkel a, b und c eines beliebigen Winkels α (siehe Skizze):



Strahlensatz 1: Zwei beliebige Streckenabschnitte auf den Schenkeln verhalten sich gleich (zum Beispiel; SA:AB = SA':A'B' oder SA:SB = SA':SB').

Strahlensatz 2: Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich gleich zu den jeweiligen Strecken auf den Schenkeln (zum Beispiel; AA':SA = BB':SB = CC':SC oder auch AA':SA' = BB':SB' = CC':SC').

Strahlensatz 3: Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich zueinander gleich (zum Beispiel; AA':A'A" = BB':B'B" = CC':C'C").

Alle diese 'Zuordnungen' oder 'Verhaltensweisen' sind nichts anderes als ***proportionale* Zuordnungen**, das heisst diese Strecken stehen zueinander jeweils in einem ***direkt-proportionalen* Zusammenhang**. Folglich können sie auch durch Brüche in Gleichungen umgeschrieben werden:

Strahlensatz 1:

$$\frac{SA}{AB} = \frac{SA'}{A'B'} \quad \text{oder} \quad \frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'}$$

Strahlensatz 2:

$$\frac{AA'}{SA} = \frac{BB'}{SB} = \frac{CC'}{SC} \quad \text{oder} \quad \frac{AA'}{SA'} = \frac{BB'}{SB'} = \frac{CC'}{SC'}$$

Strahlensatz 3:

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''} = \frac{CC'}{C'C''}$$

A5 Übungen

1. Löse die folgenden Aufgaben, indem die jeweiligen Problemstellungen durch eine Skizze auf das Problem des Strahlensatzes reduziert wird (und löse es dann natürlich mit Hilfe des Strahlensatzes - aber: mit den 'Werkzeugen' der Proportionalität):

a) Die Dörfer 'Pontring' und 'Gelfaring' liegen von der Stadt 'Hondelch' aus gesehen auf einer Geraden. Dabei ist 'Pontring' von 'Hondelch' 43km weit entfernt und 'Gelfaring' von 'Hondelch' 28km weit entfernt. Die Dörfer 'Maysaneck' und ' Penetrumba' liegen von 'Hondelch' aus gesehen ebenfalls auf einer Geraden und die Luftlinienentfernungen von 'Maysaneck' nach 'Gelfaring' und von 'Penetrumba' nach 'Pontring' bilden zwei Parallelen.
- Wie weit liegt nun 'Maysaneck' von 'Hondelch' entfernt, wenn 'Penetrumba' 102km weit entfernt von 'Hondelch' liegt?
- Wie weit voneinander entfernt liegen 'Penetrumba' und 'Maysaneck'?
- Wie weit entfernt ist 'Penetrumba' von 'Pontring', wenn es von 'Maysaneck' bis 'Gelfaring' 80km sind?

b) Die zwei Bergspitzen des Piz Gadín und des Piz Kolden liegen von der Stadt 'Syra' aus betrachtet auf einer Geraden. Auf einer Landkarte ist ersichtlich, dass der Piz Gadín von oben gesehen 48km weit von 'Syra´ entfernt ist, der Piz Kolden liegt 201km weit entfernt von 'Syra'. Die Stadt 'Syra' liegt 720m ü.M.
- Wie hoch ist nun der Piz Kolden, wenn der Piz Gadín genau 2044m ü.M. liegt?
- Wie weit ist es von der Bergspitze des Piz Gadín zu der Bergspitze des Piz Kolden, wenn die Bergspitze des Piz Kolden 5548km von 'Syra' entfernt ist?
- Wie weit erscheinen die beiden Bergspitzen voneinander entfernt auf einer Landkarte, d.h. von oben betrachtet?

c) Eine kleine Lastendrahtseilbahn soll zwischen dem Dorf 'Ruls' und dem Dorf 'Rishgutta' errichtet werden. Diese beiden Dörfer haben einen Höhenunterschied von 80m und sind auf einer Landkarte betrachtet (von oben gesehen) 240m voneinander entfernt. Es sollen nun jeweils im Abstand von 60m von 'Ruls' aus Masten gebaut werden, die diese Lastendrahtseilbahn stützen.
- Wie hoch werden die 3 Masten werden?
- Welche Strecken auf dem Draht liegen zwischen den 3 Masten?
- Wie lange muss der Draht der Lastendrahtseilbahn im Minimum sein?

*Proportionalitäten mit anderen Grundoperationen

L_6

Bereits in L_0 wurde beschrieben, dass die Proportionalität, so wie wir sie kennen und benannt haben, nur ein **Spezialfall** aller möglichen Proportionalitätszusammenhänge ist, nämlich derjenige, welcher als zugrunde liegende mathematische Operation die ***Multiplikation*** hat. Andere proportionale Zusammenhänge, die nicht die Multiplikation als mathematische zugrundeliegende Operation haben, sind jedoch gleichfalls 'Proportionalitäten', man nennt sie nur spezifisch in Bezug auf ihre zugrundeliegende mathematische Operation, da ansonsten Verwechslungen entstehen können. Sehr häufig treten solche Zusammenhänge zum Beispiel in Bezug auf die zugrundeliegende mathematische Operation der Exponentialfunktion auf (Zinseszinsrechnung, Wachstums- und Zerfallsrechnungen) oder der Potenzen (Zusammenhang zwischen der Fläche und dem Volumen von Körpern). Es werden im Folgenden einige exemplarische Beispiele gezeigt.

Beispiel 1: Zusammenhang zwischen Länge und Fläche / Fläche und Volumen:

a) Ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 3m besitzt eine Fläche von 9m^2. Wie gross ist die Fläche eines Quadrates mit Seitenlänge 5m?

b) Die Oberfläche eines Würfels mit einer Kantenlänge von 4cm beträgt 96cm^2. Wie gross ist die Oberfläche eines Würfels mit einer Kantenlänge von 5cm?

c) Die Oberfläche einer Kugel mit einem Radius von 12dm beträgt 1,81m^2. Wie gross muss der Radius einer Kugel sein, damit die Oberfläche 2m^2 wird?

d) Die Fläche der Lungenkapillaren einer 2kg schweren Lunge beträgt ungefähr 90m^2. Wie schwer wird eine Lunge sein, deren Lungenkapillaren eine Fläche von 500m^2 beträgt?

L6 *Proportionalitäten mit anderen Grundoperationen

Interessant ist, dass es proportionale Zusammenhänge gibt, die 'scheinbar' direkt proportional erscheinen, sie sind es jedoch nicht. Das einfachste Beispiel dazu ist der Zusammenhang zwischen der erreichten Punktzahl einer Probe und der dafür erhaltenen Note. So betrachte man eine Probe, in welcher maximal 120 Punkte erreicht werden können. Es ist wahr, dass 120 Punkte die Note 6 ergeben wird. Es ist hingegen nicht so, dass 60 Punkte die Note 3 (die Hälfte der Note 6) ergeben würden, 60 Punkte ergeben eine Note von 3,5. Und 0 Punkte ergibt nicht die Note 0, da diese ja gar nicht existiert, sondern eben die Minimalnote 1. Was verursacht nun hier diese 'Verzerrung' gegen die Note 1 hin? Die Notenberechnung beschreibt sehr wohl einen ***proportionalen*** *Zusammenhang* zwischen erhaltener Punktzahl und daraus resultierender Note, es liegen jedoch ***mehr*** *als eine* mathematische Grundoperation diesem Zusammenhang zugrunde.

Ebenfalls interessant ist zu betrachten, wie sich die Kosten eines Natelvertrages in Bezug auf die verstrichene Zeit, die man telefoniert hat, verhält. Nehme man an, dass 1 Stunde zu telefonieren 12 CHF koste. Nun ist es so, dass, auch wenn man nie telefoniert hat (also 0 Stunden), man die Grundgebühr für das Abonnement zahlen muss, zum Beispiel 25 CHF. Und hier wird der Grund für die bereits oben erwähnte 'Verzerrung' der Notenberechnung klar. Es liegt ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen Zeit und Kosten vor, dieser wird aber stets mit einer konstanten Summe (der Preis für das Abonnement) summiert. Und dies ist bei der Notenberechnung dasselbe.

Aus diesen Beispielen wird rasch eine Notwendigkeit ersichtlich. Eine Notwendigkeit nach einer allgemeinen Form, solche allgemein-proportionale Zusammenhänge mathematisch beschreiben zu können. Und dies ist möglich mit dem sogenannten **Funktions**begriff. Eine Funktion beschreibt einen allgemeinen, formalen Zusammenhang zwischen zwei (oder sogar mehreren) kategorischen Dingen. Dabei ist eine Funktion nichts anderes als eine Formel, welche die kategorischen Dinge (oft mit Variablen ausgedrückt) miteinander in Beziehung setzt.

*Funktionale Zusammenhänge L_7

Die Proportionalität, wie sie in L_1, L_2, L_3 und L_5 beschrieben wird, beschreibt einen mathematischen Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren kategorischen Dingen, dem nur eine mathematische Grundoperation zugrunde liegt, nämlich die Multiplikation. Im Falle der indirekten Proportionalität (siehe dazu L_4) die Division. Das Beispiel der Berechnung einer Note aus der erreichten Punktzahl aus L_6 zeigt, dass es im Leben oft jedoch wichtige, oft verwendete, aber einfache Zusammenhänge gibt, denen mehr als eine mathematische Grundoperation zugrunde liegt. Daher ist die Theorie für die Proportionalität, deren zugrundeliegende mathematische Operation nur die Multiplikation oder die Division ist, nicht ausreichend, um alle möglichen 'Proportionalitäten', die es geben kann, zu beschreiben. Dies wird jedoch möglich mit dem sogenannten **Funktions**begriff, wie er am Ende von L_6 erwähnt wird.

Dabei wird ein mathematischer Zusammenhang zwischen zwei oder auch mehreren kategorischen Dingen direkt mit den zugrundeliegenden mathematischen Operationen in Form einer ***Formel*** beschrieben. Da per Definition (siehe dazu L_0) Proportionalitäten (mathematische Zusammenhänge) nur dann auftreten, wenn sie in allen möglichen, unterscheidbaren Fällen gleich bleibt, können in dieser Formel die kategorischen Dinge, zwischen denen der mathematische Zusammenhang besteht, *variabel* bleiben. Diese Dinge werden somit oft auch mit Variabeln in der Formel beschrieben, zum Beispiel x und y. Desweiteren ist es oft sinnvoll, diese Formel in eine Form zu bringen, sodass man den Wert des einen kategorischen Dinges einsetzen kann und die Formel sodann gleich den Wert des anderen kategorischen Dinges berechnet. Das heisst, die Formel muss nach einer der Variable aufgelöst sein (auf der einen Seite der Gleichung steht nur eine Variable allein). Falls eine Formel in einer solchen Form vorhanden ist, so spricht man davon, dass diese Formel ***explizit*** angegeben ist. Falls dies nicht so ist (falls auf keiner Seite der Gleichung eine der Variablen alleine steht), so spricht man davon, dass die Formel ***implizit*** angegeben ist.

Eine solche Formel nennt man nun einen ***Funktionalen Zusammenhang***, da die Formel den mathematischen Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren kategorischen Dingen in Form einer **Funktion** beschreibt. Dabei wird die Formel oft

L7 *Funktionale Zusammenhänge

durch den Buchstaben der Variablen beschrieben, welche für das isolierte kategorische Ding steht, und in Klammern wird die Variable angegeben, welche das andere oder die anderen kategorischen Dinge beschreibt/en, die als Werte zur Berechnung des isolierten Dinges in die Formel eingesetzt werden können. Man spricht dabei von der *Abhängigkeit* zwischen der isolierten Variablen und ihren Argumenten.

Es sollen nun die Beispiele aus L_6 in Form solcher Funktionen beschrieben werden:

Beispiel: a) Die Seitenlänge beschreibe die Variable s und die Fläche des Quadrates beschreibe die Variable A:

Funktionen: $A(s) = s^2$ oder $s(A) = |\sqrt{A}|$

b) Die Kantenlänge des Würfels beschreibe die Variable k und die Oberfläche des Würfels beschreibe die Variable O:

Funktionen: $O(k) = 6 \cdot k^2$ oder $k(O) = |\sqrt{(O \div 6)}|$

c) Der Radius der Kugel beschreibe die Variable r und die Oberfläche der Kugel beschreibe die Variable O:

Funktionen: $O(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ oder $r(O) = |\sqrt{(O \div (4 \cdot \pi))}|$

d) leider nicht trivial, d.h. es kann nur in individuellen Fällen beschrieben werden.

Notenberechnung:

Es sei die Maximalpunktzahl 120 Punkte, die erreichten Punkte werden mit der Variable p beschrieben und die Note mit der Variable N:

Funktionen: $N(p) = ((5 \cdot p) \div 120) + 1$

oder $p(N) = (120 \cdot N - 120) \div 5$

Natelvertrag:

Die Stunden, die man telefoniert hat sei durch die Variable t beschrieben und die Kosten, die man zahlen muss, durch die Variable K:

Funktionen: $K(t) = 12 \cdot t + 25$ oder $t(K) = (K - 25) \div 12$