L19

*Lösungen kontrollieren mit dem Satz von Viëta

Die Allgemeine Form von Quadratischen Gleichungen legt eine Vermutung nahe, welche der französische Mathematiker *François* ***Viète*** (*1540 - †1603) wie folgt beschrieben hat:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$$

In Worten:

"Jede Quadratische Gleichung kann in zwei Klammerausdrücke faktorisiert werden, in welchen jeweils die Lösungen der Quadratischen Gleichungen von x subtrahiert werden."

Was zuerst relativ kompliziert und weit hergeholt erscheint, kann jedoch mit einer simplen Überlegung schnell nachvollzogen werden, wenn man die Klammerausdrücke genauer ansieht:

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$$

Es ist doch offensichtlich, dass diese Gleichung stimmt, sobald entweder der eine Klammerausdruck 0 wird, oder sobald der andere Klammerausdruck 0 wird. Falls beide Klammerausdrücke 0 sind, stimmt die Gleichung sowieso:

Fall 1 (1.Klammerausdruck ist 0): $0\cdot(x - x_2) = 0$

Fall 2 (2.Klammerausdruck ist 0): $(x - x_1)\cdot 0 = 0$

Fall 3 (beide sind 0): $0\cdot 0 = 0$

Nun gilt es einzig herauszufinden, wann denn die jeweiligen Klammerausdrücke 0 werden. Die Antwort liegt jedoch auf der Hand, nämlich genau dann, wenn man für die Unbekannte x jeweils die beiden Lösungen von x einsetzt, denn dann steht:

Fall 1 (1.Klammerausdruck ist 0): $(x_1 - x_1)\cdot(x - x_2) = 0\cdot(x - x_2) = 0$

Fall 2 (2.Klammerausdruck ist 0): $(x - x_1)\cdot(x_2 - x_2) = (x - x_1)\cdot 0 = 0$

Fall 3 (beide sind 0): $(x_1 - x_1)\cdot(x_2 - x_2) = 0\cdot 0 = 0$

Und damit wird der ganze Ausdruck ausgerechnet zu:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - x\cdot x_2 - x\cdot x_1 + x_1\cdot x_2$$
$$= x^2 - x\cdot(x_1 + x_2) + x_1\cdot x_2 = 1\cdot x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2 = 0$$

was zu folgender Parameterbestimmung in der Allgemeinen Form führt:

$a = 1$ $\qquad b = -(x_1 + x_2)$ $\qquad c = x_1\cdot x_2$

L19 *Lösungen kontrollieren mit dem Satz von Viëta

Wird nun davon ausgegangen, dass a nicht unbedingt 1 ist, so muss die folgende Modifizierung in der Allgemeinen Form vollzogen werden:

$$x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a} = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$$

Dies kann folgendermassen ausgerechnet werden:

$$x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2 = 0$$

Dadurch wird der folgende Zusammenhang geliefert, der sogenannte **Satz von Viëta**:

$$(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a} \qquad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Mit dem Satz von Viëta können ***alle*** Quadratischen Gleichungen, wenn man die Lösungen dazu herausgefunden hat, schnell auf ihre Korrektheit hin ***überprüft*** werden.

Beispiel: $(x + 12)\cdot(2 - x) = x^2 - 6x - 6$

(1.Schritt): $2x - x^2 + 24 - 12x = -x^2 - 10x + 24 = x^2 - 6x - 6 \quad | + x^2$

$-10x + 24 = 2x^2 - 6x - 6 \quad | + 10x \quad | - 24$

$0 = 2x^2 + 4x - 30$

(2.Schritt): $a = 2, b = 4, c = -30$

(3.Schritt):

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4^2 - (4\cdot 2\cdot -30))}}{2\cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(16 - -240)}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{(16 + 240)}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{(256)}}{4}$$

(4.Schritt):

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 16}{4} \quad x_1 = \frac{-4 + 16}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad x_2 = \frac{-4 - 16}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

(Lösungen kontrollieren mit Viëta):

$$(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a} \qquad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(3 + -5) = -2 = -\frac{4}{2} \checkmark \qquad 3\cdot -5 = -15 = \frac{-30}{2} \checkmark$$

was stimmt (2 mal ✓)

Damit sind die Lösungen richtig.

*Lösungsanalyse mit der Allgemeinen Form

L20

Betrachtet man die Allgemeine Form genauer, so erkennt man, dass darin bereits alle Spezialfälle von Quadratischen Gleichungen in Form der Parameterbestimmung enthalten sind. So existieren für die Allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

die folgenden Spezialfälle:

$a = 0$ und $b = 0$ und $c = 0$: ***wahre Aussage***, nämlich $0 = 0$

$a = 0$ und $b = 0$ und $c \neq 0$: ***Widerspruch!***

$a = 0$ und $b \neq 0$ und $c = 0$: ***Lineare Gleichung***, in welcher $x = 0$

$a = 0$ und $b \neq 0$ und $c \neq 0$: ***Lineare Gleichung***, in welcher $x = -c/b$

$a \neq 0$ und $b = 0$ und $c = 0$: ***Potenzgleichung***, in welcher $x = 0$

$a \neq 0$ und $b = 0$ und $c \neq 0$: ***Potenzgleichung***, in welcher $x_{1,2} = \pm\sqrt{(-c/a)}$

$a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $c = 0$: ***Quadratische Gleichung***, in welcher jedoch eine Lösung sicher $x_1 = 0$ ist, da das Folgende gilt:
$ax^2 + bx = x \cdot (ax + b) = 0$
und die andere Lösung $x_2 = -b/a$

$a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $c \neq 0$: Normale ***Quadratische Gleichung***, die mit dem Schritt-für-Schritt-Verfahren und der Lösungsformel (Mitternachstformel) nach x_1 und x_2 aufgelöst werden kann.

Betrachtet man desweiteren die Lösungsformel genauer, so wird ersichtlich, dass der Ausdruck unter der Wurzel (wird *Diskriminante* genannt) unbedingt positiv sein muss, also für:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - (4ac))}}{2a}$$

muss $D = b^2 - (4ac) \geq 0$

gelten, ansonsten wird die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen, was nur Lösungen im Raum der sogenannten ***Komplexen*** *Zahlen* geben wird. Es sei hier jedoch darauf hingewiesen, dass bei komplexen Zahlen die Definition:

$\sqrt{(-1)} := \mathbf{i}$ (dabei ist **i** die sogenannte *imaginäre Einheit*)

gelte. Auf alles weitere soll hier nicht tiefer eingegangen werden.

A 19 & 20

Übungen

1. Bestimme jeweils welche der Lösungen zu der Quadratischen Gleichung gehört:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

❑ $x_1 = 4$ $x_2 = 1$
❑ $x_1 = -2$ $x_2 = 3$
❑ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$
❑ $x_1 = -2$ $x_2 = -4$

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

❑ $x_1 = 4$ $x_2 = 3$
❑ $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = 2$
❑ $x_1 = -4$ $x_2 = 11$
❑ $x_1 = 5$ $x_2 = 2$

c) $4x^2 - 36x + 77 = 0$

❑ $x_1 = -3{,}5$ $x_2 = -5{,}5$
❑ $x_1 = 15$ $x_2 = 21$
❑ $x_1 = 40$ $x_2 = -4$
❑ $x_1 = 3{,}5$ $x_2 = 5{,}5$

d) $4x^2 - 12x - 27 = 0$

❑ $x_1 = 8$ $x_2 = 28$
❑ $x_1 = -1{,}5$ $x_2 = 4{,}5$
❑ $x_1 = -1$ $x_2 = 27$
❑ $x_1 = 6$ $x_2 = -3$

e) $4x^2 - 4x - 35 = 0$

❑ $x_1 = 3$ $x_2 = 1$
❑ $x_1 = -3$ $x_2 = 4$
❑ $x_1 = -2{,}5$ $x_2 = 1{,}5$
❑ $x_1 = 3{,}5$ $x_2 = -2{,}5$

f) $2x^2 - 3x - 65 = 0$

❑ $x_1 = -6{,}5$ $x_2 = 5$
❑ $x_1 = 6{,}5$ $x_2 = -5$
❑ $x_1 = 6{,}5$ $x_2 = 5{,}5$
❑ $x_1 = -6{,}5$ $x_2 = -5{,}5$

g) $x^2 - (7/6)x - (5/6) = 0$

❑ $x_1 = (2/9)$ $x_2 = (5/3)$
❑ $x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 1$
❑ $x_1 = -0{,}5$ $x_2 = (5/3)$
❑ $x_1 = 108$ $x_2 = 55$

*h) $x^2 - 4x + 13 = 0$

❑ $x_1 = 2 + 3i$ $x_2 = 2 - 3i$
❑ $x_1 = 3 + 2i$ $x_2 = 3 - 2i$
❑ $x_1 = 2 + i$ $x_2 = 2 - i$
❑ $x_1 = -3 + i$ $x_2 = -3 - i$

i) $x^2 + 4 = 0$

❑ $x_1 = 2i$ $x_2 = 0$
❑ $x_1 = 4$ $x_2 = 0$
❑ $x_1 = -2i$ $x_2 = 2i$
❑ $x_1 = 2$ $x_2 = -2$

j) $2x^2 - 143x + 2121 = 0$

❑ $x_1 = -21$ $x_2 = 50{,}5$
❑ $x_1 = 21$ $x_2 = 50{,}5$
❑ $x_1 = 21$ $x_2 = -50{,}5$
❑ $x_1 = -21$ $x_2 = -50{,}5$

k) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

❑ $x_1 = 3$ $x_2 = -2$
❑ $x_1 = -1/2$ $x_2 = 3/2$
❑ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$
❑ $x_1 = -3/4$ $x_2 = 4/4$

l) $x^2 - x - 40200 = 0$

❑ $x_1 = 200$ $x_2 = 201$
❑ $x_1 = -200$ $x_2 = 201$
❑ $x_1 = 200$ $x_2 = -201$
❑ $x_1 = -200$ $x_2 = -201$

m) $x^2 - 6x + 9 = 0$

❑ $x_1 = 3$ $x_2 = -3$
❑ $x_1 = 8$ $x_2 = -2$
❑ $x_1 = 3$ $x_2 = 3$
❑ $x_1 = 5$ $x_2 = 1$

n) $2x^2 + 2bx + ax + ab = 0$

❑ $x_1 = a$ $x_2 = b$
❑ $x_1 = -a/2$ $x_2 = b$
❑ $x_1 = -a/2$ $x_2 = -b$
❑ $x_1 = a/2$ $x_2 = -b$